

SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
18.01.2012 Süre: 80 dakika

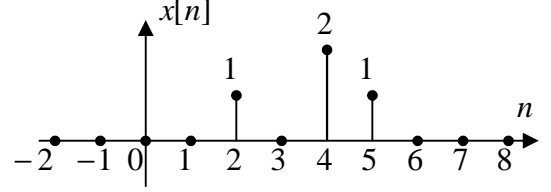
1) Bir öğrencinin ders çalışma sistemi şöyledir: Her bir derse çalışmaya sınavdan üç gün önce 1 saat ile başlıyor, iki gün önce 2 saat, bir gün önce 3 saatle devam ediyor ve sınav günü 1 saat ile o derse çalışmayı sonlandırıyor. Günlere göre sınav sayıları giriş, günlük ders çalışma saat sayıları çıkış olarak tanımlanıyor ve öğrencinin sınav programının, bu sistemin doğrusal ve zamanla değişmez olmasını bozmayacak, günün mümkün olan saat sınırlarını zorlamayacak bir yoğunlukta olduğu ve aksamayacağı varsayılıyor.

a) Sistemin birim darbe tepkisini çiziniz. (6 puan)

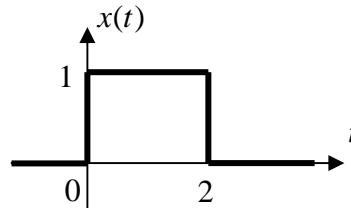
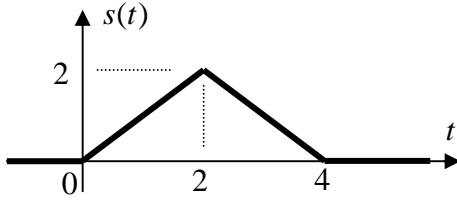
b) Varsayımlar altında sistem nedensel midir, kararlı mıdır? (2+2=4 puan) Genel ifadelerle değil, bu sisteme özel gerekçelerini belirterek yazınız.

c) Öğrencinin günlere (n) göre sınav sayıları ($x[n]$)

grafikteki gibiyse bu öğrencinin günlere göre ders çalışma saat sayılarını grafikte gösteriniz. (10 puan)



2)



Birim basamak tepkisi yukarıdaki $s(t)$ olan (DZD) sistemin

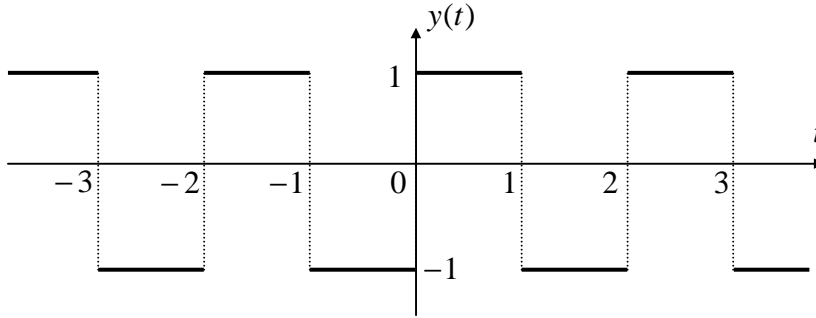
a) Girişine şekildeki $x(t)$ uygulanırsa alınacak çıkış sinyalini ($y(t)$) çiziniz. (12 puan)

b) Birim darbe tepkisini ($h(t)$) çiziniz. (8 puan)

Her iki çizimde de özel noktaların yeri belli olmalıdır.

3) Şekilde verilen $T = 2$ ile periyodik $y(t)$ sinyalini Fourier serisine açınız. (Genel katsayı formüllerini bulunuz ve serinin sıfırdan farklı en az 3 terimini, katsayılarının sayısal değerlerini yerine koyarak yazınız.)

(20 puan)



4) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu (5 puan) ve $x(t) = e^{-t}u(t)$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını (15 puan) bulunuz.

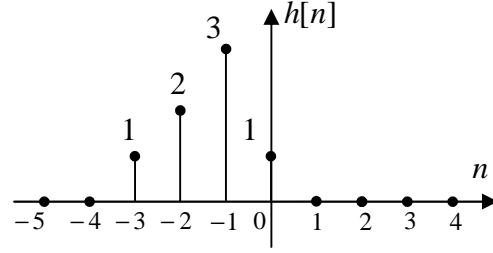
$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = 5\dot{x}(t) + 5x(t)$$

5) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu (6 puan) ve birim darbe tepkisini (14 puan) bulunuz.

$$y[n+2] - 0,5y[n+1] + 0,06y[n] = x[n+1] - 0,5x[n]$$

SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI CEVAP ANAHTARI
18.01.2012

1) a) Bu sistem için birim darbe tepkisi demek, 0. günde bir adet sınavı varsa öğrencinin günlere göre çalışma saatleri demektir ve şekildeki gibidir.



b) Bazı $n < 0$ için $h[n] \neq 0$ olduğu için sistem nedensel değildir.

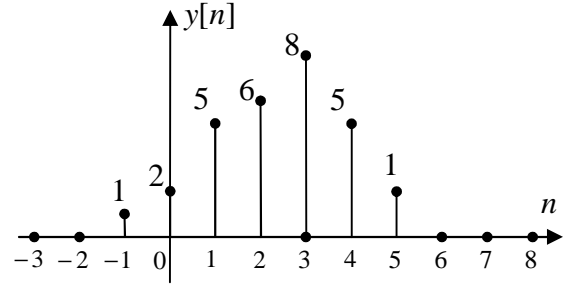
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = 1 + 2 + 3 + 1 = 7 < \infty \quad \text{olduğu için sistem}$$

kararlıdır. (Günün 24 saat sınırı olmasa bile bu nedenle kararlı olurdu.)

c) Çıkış $y[n] = x[n] * h[n]$. Her iki sinyal de sonlu süreli olduğu için şu yöntem uygulanabilir:

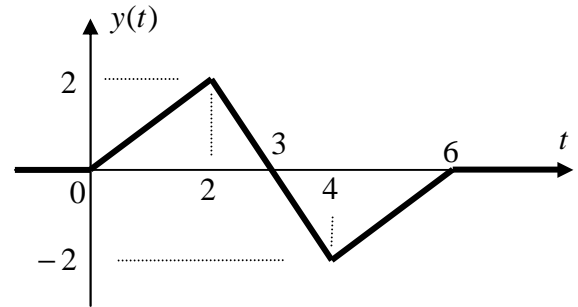
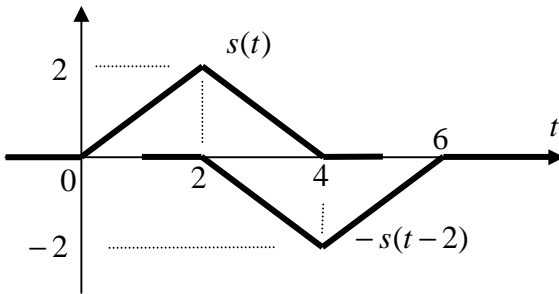
		1	2	3	1	→ sonuncusu $h[0]$
×		1	0	2	1	→ sonuncusu $x[5]$
		1	2	3	1	
	2	4	6	2		
	0	0	0	0		
+	1	2	3	1		
		1	2	5	6	8
		5	1			

→ sonuncusu $y[0+5] = y[5]$. Buna göre $y[n]$ yukarıdaki şekilde



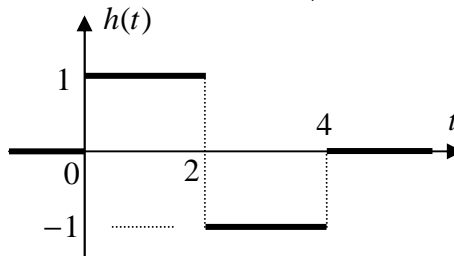
gösterildiği gibi olur. (Dikkat! Bu işlem her ne kadar klasik çarpmaya benzese de elde aktarımı yapılmaz ve her bir sayı eksi de olsa artı da olsa rakam rakam değil olduğu gibi sayı olarak ele alınır.)

2) a) $x(t) = u(t) - u(t-2)$ olduğu için u yerine s ve x yerine y yazılır: $y(t) = s(t) - s(t-2)$ olur. Aşağıda çıkışın bu iki bileşeni soldaki şekilde, toplamı () da sağdaki şekilde gösterilmiştir.



b) Birim darbe tepkisi $h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$

Yandaki şekildeki gibi elde edilir.



3) Gerçek seriye açalım: $y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$; $\omega = 2\pi/T = 2\pi/2 = \pi$

$y(-t) = -y(t)$ olduğu için sinyal tektir. Dolayısıyla gerçel serisinde yalnız sinüslü terimler vardır. $a_0 = a_k = 0 \quad \forall k$. Ayrıca tek harmonik simetrisine de sahip olduğu için tek k 'lar için b_k sıfır olacaktır. Bunu sağlama amacıyla kullanacağız.

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} y(t) \sin(k\omega t) dt = \frac{4}{2} \int_0^{2/2} y(t) \sin(k\pi t) dt = 2 \int_0^1 1 \cdot \sin(k\pi t) dt = \frac{-2}{k\pi} \cos(k\pi t) \Big|_0^1 = \frac{-2}{k\pi} \cos(k\pi) - \frac{-2}{k\pi}$$

b_k için k 'nın sıfır olması söz konusu olmadığı için burada belirsizlik yoktur. $\cos(k\pi) = (-1)^k$ olduğu için

$$b_k = \frac{2}{k\pi} (1 - (-1)^k) \rightarrow b_k = \begin{cases} 4/k\pi & k \text{ tekse} \\ 0 & k \text{ çiftse} \end{cases} \rightarrow b_1 = \frac{4}{\pi}, \quad b_3 = \frac{4}{3\pi}, \quad b_5 = \frac{4}{5\pi}.$$

$$y(t) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin(\pi t)}{1} + \frac{\sin(3\pi t)}{3} + \frac{\sin(5\pi t)}{5} + \dots \right)$$

Tek harmonik simetrlili olduğu için seride çift harmonik

yoktur. Karmaşık seri katsayıları istenirse, sinyal tek olduğu için $c_k = -c_{-k} = -j \frac{b_k}{2} = \begin{cases} -j2/k\pi & k \text{ tekse} \\ 0 & k \text{ çiftse} \end{cases}$

$$\rightarrow c_1 = -c_{-1} = -j \frac{2}{\pi}, \quad c_3 = -c_{-3} = -j \frac{2}{3\pi}, \quad c_5 = -c_{-5} = -j \frac{2}{5\pi}$$

$$y(t) = \dots + j \frac{2}{5\pi} e^{-j5\pi t} + j \frac{2}{3\pi} e^{-j3\pi t} + j \frac{2}{\pi} e^{-j\pi t} - j \frac{2}{\pi} e^{j\pi t} - j \frac{2}{3\pi} e^{j3\pi t} - j \frac{2}{5\pi} e^{j5\pi t} - \dots$$

$$4) \text{ Transfer fonksiyon: } \frac{5(j\omega) + 5}{(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 6} = H(\omega) = \frac{5(j\omega + 1)}{(j\omega + 2)(j\omega + 3)}$$

$$x(t) = e^{-t} u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1} \quad Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \frac{5(j\omega + 1)}{(j\omega + 2)(j\omega + 3)} \cdot \frac{1}{j\omega + 1}$$

$$Y(\omega) = \frac{5}{(j\omega + 2)(j\omega + 3)} = \frac{A}{j\omega + 2} + \frac{B}{j\omega + 3}$$

$$A = \frac{5}{(j\omega + 3)} \Big|_{j\omega \leftarrow -2} = \frac{5}{-2 + 3} = 5 \quad B = \frac{5}{(j\omega + 2)} \Big|_{j\omega \leftarrow -3} = \frac{5}{-3 + 2} = -5$$

$$Y(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y(t) = 5e^{-2t} u(t) - 5e^{-3t} u(t) = \boxed{y(t) = 5(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)}$$

$$5) \text{ Transfer fonksiyon: } \frac{z - 0,5}{z^2 - 0,5z + 0,06} = H(z) = \frac{z - 0,5}{(z - 0,2)(z - 0,3)} ; |z| > 0,3$$

$$H(z) = \frac{A}{z - 0,2} + \frac{B}{z - 0,3} \quad A = \frac{z - 0,5}{(z - 0,3)} \Big|_{z=0,2} = \frac{0,2 - 0,5}{0,2 - 0,3} = 3 = A$$

$$B = \frac{z - 0,5}{(z - 0,2)} \Big|_{z=0,3} = \frac{0,3 - 0,5}{0,3 - 0,2} = -2 = B$$

$$H(z) = 3z^{-1} \left(\frac{z}{z - 0,2} \right) - 2z^{-1} \left(\frac{z}{z - 0,3} \right) ; |z| > 0,3 \quad \text{Buradaki } z^{-1} \text{ çarpanını 1 adım geriletir:}$$

$$\boxed{h[n] = 3 \times (0,2)^{n-1} u[n-1] - 2 \times (0,3)^{n-1} u[n-1]}$$