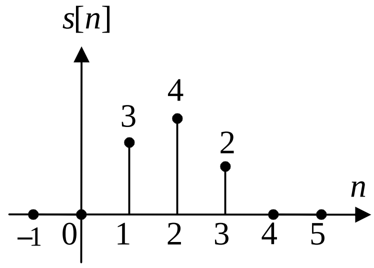
SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV SORULARI
21.11.2011   Süre: 80 dakika

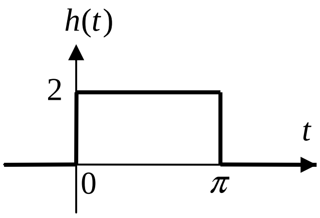
1) $x(t) = 2u(t+2) - 4u(t-2)$ sinyalinin tek ve çift bileşenlerini çiziniz. **(15 puan)**

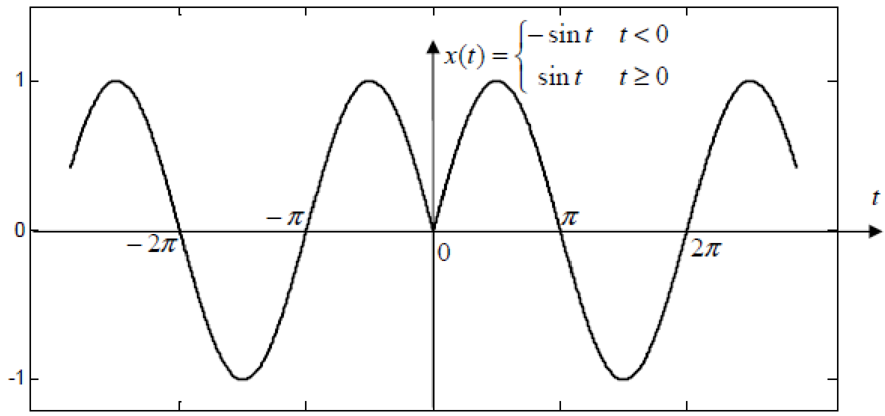
2) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi $y(t) = \int_{t-2}^{t} x(\tau+1)d\tau$ ile verilen sistem doğrusal mıdır, bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır, zamanla değişen midir? **(5x2 = 10 puan)** (Açıklama beklenmemektedir.)

3) Birim basamak tepkisi şekildeki $s[n]$ sinyali olan doğrusal zamanla değişmez bir sistemin girişine de $x[n] = s[n]$ sinyali uygulanırsa çıkışı ne olur? Çiziniz. **(20 puan)** İstediğiniz yolla hesaplayınız.
Yol gösterme: Önce sistemin birim darbe tepkisini bulmanız kolaylıktır.



4) Birim darbe tepkisi $h(t)$ ve girişi $x(t)$ şekillerde verilen doğrusal zamanla değişmez sistemin çıkışını bulunuz. **(25 puan)** (Çizmeniz beklenmemektedir.)





5) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = x(t)$$

ile verilen sistemin çıkışını, $x(t) = u(t)\cos t$ girişi ve $y(0) = 0$ başlangıç şartı için bulunuz. **(15 puan)**

6) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$2y[n+2] - 2y[n+1] + 0{,}5y[n] = 6x[n-5]$$

ile verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. **(15 puan)**

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV CEVAP ANAHTARI
21.11.2011

1) $x(t) = 2u(t+2) - 4u(t-2) = \begin{cases} 0 & t < -2 \\ 2 & -2 \le t < 2 \\ -2 & t \ge 2 \end{cases}$

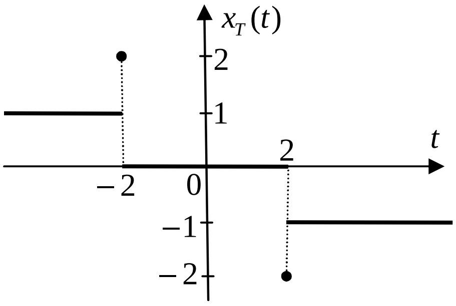
Tek ve çift bileşenlerin önce sağ yarılarını bulalım:

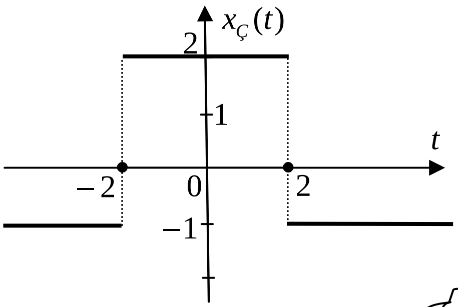
$0 \le t < 2$ için $x_T(t) = (2-2)/2 = 0$ $\qquad x_Ç(t) = (2+2)/2 = 2$

$t = 2$ için $x_T(2) = (-2-2)/2 = -2$ $\qquad x_Ç(2) = (-2+2)/2 = 0$

$t > 2$ için $x_T(t) = (-2-0)/2 = -1$ $\qquad x_Ç(t) = (-2+0)/2 = -1$

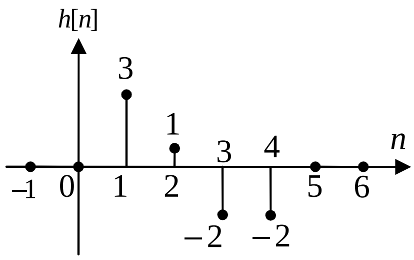
Bunların simetriklerini de alarak çizelim:





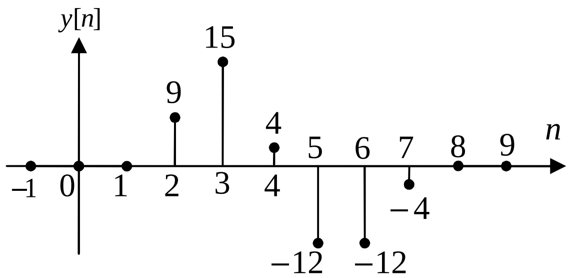
2) Sistem belleklidir.
Doğrusaldır.
Nedensel değildir.
Kararlıdır (her sonlu sinyalin her sonlu zaman aralığı boyunca integrali sonludur).
Zamanla değişmez (sınırlarda sonlu sabit yok).

3) Birim darbe tepkisi: $h[n] = s[n] - s[n-1]$

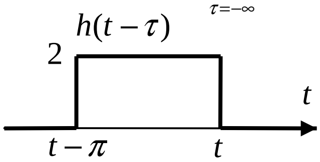


Çıkış $y[n] = x[n] * h[n]$. Bunu klasik çarpmaya benzer yolla yapalım:

		3	1	(-2)	(-2)		Sonuncusu $h[4]$
×			3	4	2		Sonuncusu $x[3] = s[3]$
		6	2	(-4)	(-4)		
	12	4	(-8)	(-8)			
+	9	3	(-6)	(-6)			
	9	15	4	(-12)	(-12)	(-4)	Sonuncusu $y[3+4] = y[7]$



4) $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$



<u>$t < 0$ için :</u>

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} -2\sin\tau & t-\pi \le \tau \le t \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{t-\pi}^{t} -2\sin\tau\, d\tau = 2\cos\tau \,\Big|_{t-\pi}^{t} = 2\cos t - 2\cos(t-\pi)$$

$$y(t) = 4\cos t$$

<u>$0 \le t < \pi$ için :</u>

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} -2\sin\tau & t-\pi \le \tau \le 0 \\ 2\sin\tau & 0 \le \tau \le t \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{t-\pi}^{0} -2\sin\tau\, d\tau + \int_{0}^{t} 2\sin\tau\, d\tau = 2\cos\tau \,\Big|_{t-\pi}^{0} - 2\cos\tau \,\Big|_{0}^{t} = 2 - 2\cos(t-\pi) - 2\cos t + 2 \qquad \rightarrow \quad y(t) = 4$$

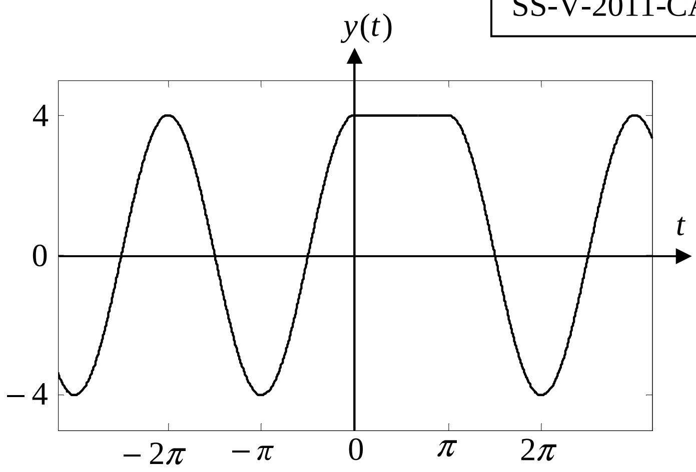
<u>$t \geq \pi$ için :</u>

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 2\sin\tau & t-\pi \le \tau \le t \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{t-\pi}^{t} 2\sin\tau \, d\tau = -2\cos\tau \Big|_{t-\pi}^{t}$$

$$= -2\cos t + 2\cos(t-\pi) \rightarrow \quad y(t) = -4\cos t$$

Sonuç: $y(t) = \begin{cases} 4\cos t & t<0 \\ 4 & 0 \le t < \pi \\ -4\cos t & t \ge \pi \end{cases}$



5) Diferansiyel denklemin sağ tarafı $u(t)$ ile çarpım halinde ve 0 anındaki tüm standart başlangıç şartları sıfır (burada 1. Mertebe olduğu için yalnızca $y(0) = 0$). Bu yüzden $t \ge 0$ çözümünü $u(t)$ ile çarpacağız.

$$\lambda + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -2$$

$t \ge 0$ için homojen çözüm: $y_h(t) = Ae^{-2t}$

sağ taraf = $x(t) = \cos t$ için $\mp j \notin \{\lambda\}$, dolayısıyla $y_ö(t) = b\sin t + c\cos t$

$$\dot{y}_ö(t) = b\cos t - c\sin t \quad \rightarrow \quad \dot{y}_ö(t) + 2y_ö(t) = (b+2c)\cos t + (-c+2b)\sin t = \cos t$$

$$b + 2c = 1$$

$$2b - c = 0 \quad \rightarrow \quad b = 1/5, \quad c = 2/5 \quad \rightarrow \quad y_ö(t) = \frac{1}{5}\sin t - \frac{2}{5}\cos t$$

$$y(t) = Ae^{-2t} + \frac{1}{5}\sin t - \frac{2}{5}\cos t$$

$$y(0) = 0 = A - 2/5 \quad \rightarrow \quad A = 2/5$$

Tüm zamanlar için çıkış: $y(t) = \frac{1}{5}\left(2e^{-2t} + \sin t - 2\cos t\right)u(t)$

6) $n > 5$ için $2h[n+2] - 2h[n+1] + 0{,}5h[n] = 0$ denklemini $h[6] = 0$ ve $h[7] = 6/2 = 3$ için çözeriz:

$$2\lambda^2 - 2\lambda + 0{,}5 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$$

$$\rightarrow \quad h[n] = \frac{(A_1 + A_2 n)}{2^{n-7}} \quad \rightarrow \quad h[6] = 2A_1 + 12A_2 = 0$$

$$h[7] = A_1 + 7A_2 = 3 \quad \rightarrow \quad A_1 = -18 \ , \quad A_2 = 3$$

Tüm zamanlar için yazılırsa: $\boxed{h[n] = \frac{(3n-18)}{2^{n-7}} u[n-7]}$

Başka gösterimler de mümkündür. Meselâ,

$$h[n] = \frac{(6n-36)}{2^{n-6}} u[n-6] = \frac{(384n-2304)}{2^n} u[n-6] = \frac{(384n-2304)}{2^n} u[n-7]$$

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI

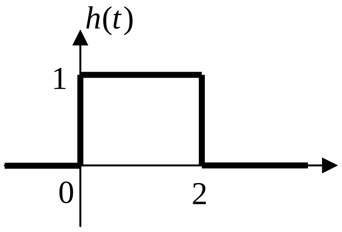
04.01.2012 Süre: 80 dakika

3. ve 4. sorular zorunludur. Diğer sorulardan istediğiniz 3 tanesini çözünüz.

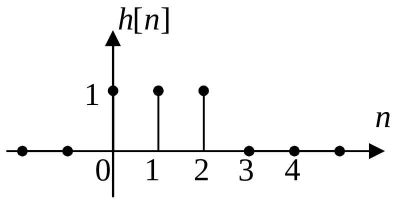
1) a) a bir tamsayı olmak üzere $x[n]*\delta[n-a]=x[n-a]$ olduğunu, konvolüsyon toplamı formülünü kullanarak ispatlayınız. **(10 puan)**

b) Birim darbe tepkisi aşağıdaki $h(t)$ olan doğrusal zamanla değişmez (DZD) sistem bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır? Her birini DZD sistemlere özel kuralını uygulayarak belirtiniz. **(3+3+4=10 puan)**

2) Birim darbe tepkisi yandaki $h(t)$ olan (DZD) sistemin girişine $x(t)=h(t)$ sinyali uygulanırsa alınacak çıkış sinyalini ($y(t)$) çiziniz. **(20 puan)**



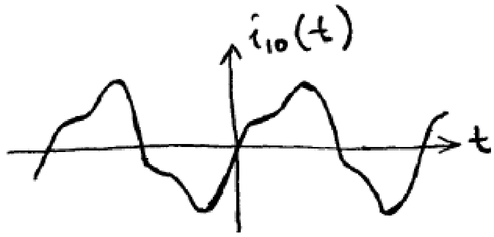
3) Birim darbe tepkisi $h[n]$ yanda verilen DZD sistemin girişine $x[n]=(-1)^n \quad \forall n$ sinyali uygulanırsa çıkış fonksiyonu ne olur? (Çizim beklenmemektedir.) **(25 puan)**



4) Primerine AC gerilim uygulanan yüksüz bir trafonun primer akımı şekildeki gibidir. Bu akımın gerçel ve karmaşık Fourier serileri

$$i_{10}(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{jk\omega t}$$

biçimlerinde düşünüldüğünde buradaki katsayıların hangilerinin sıfır olduğu söylenebilir? **(15 puan)**



("a_0" , "c_0" , "$a_k\ \forall k$" , "$b_k\ \forall k$" , "tek k'lar için hem a_k hem b_k hem c_k" , "çift k'lar için hem a_k hem b_k hem c_k" , "tüm negatif k'lar için c_k" , "tüm pozitif k'lar için c_k" seçeneklerinden sıfır olanların hepsini seçiniz.)

5) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(6 puan)** ve birim darbe tepkisini **(14 puan)** bulunuz.

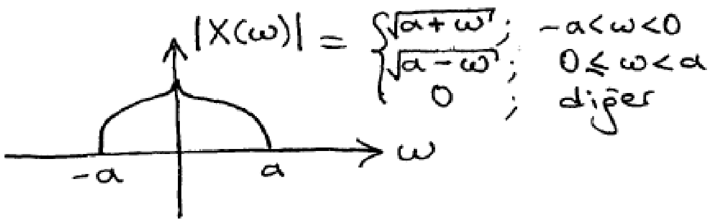
$$2\ddot{y}(t)+8\dot{y}(t)+6y(t)=12\dot{x}(t)+4x(t)$$

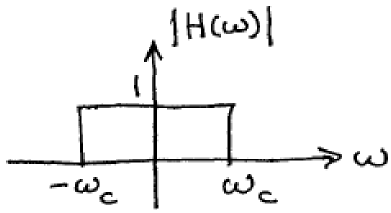
6) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$2y[n+1]-y[n]=x[n+1]+x[n]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)** ve $x[n]=u[n]$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını **(15 puan)** Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle bulunuz.

7) Kaydedilmiş bir ses sinyalinin ($x(t)$) genlik spektrumu $|X(\omega)|$ aşağıdaki gibidir. Bu sinyali kazanç spektrumu $|H(\omega)|$ aşağıdaki gibi olan ideal bir alçak geçiren süzgeçten geçirerek $y(t)$ sinyali elde edilecektir. $y(t)$ sinyalinin enerjisinin, $x(t)$ sinyalinin enerjisinin yarısı olması isteniyorsa alt kesim frekansı ω_c ne olmalıdır? **(20 puan)**





BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI
04.01.2012

1) a) $x[n]*\delta[n-a]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[n-k]\cdot\delta[k-a]$ Darbe $k=a$ dışında sıfır olduğu için $x[n-k]$'da $k=a$ yazılır ve bu $x[n-a]$ sabit (k'ya göre) olduğu için toplamın dışına çıkar:

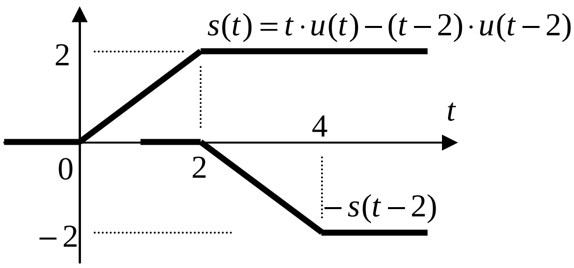
$$x[n]*\delta[n-a]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[n-a]\cdot\delta[k-a]=x[n-a]\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[k-a]}_{1}=x[n-a]$$ olur.

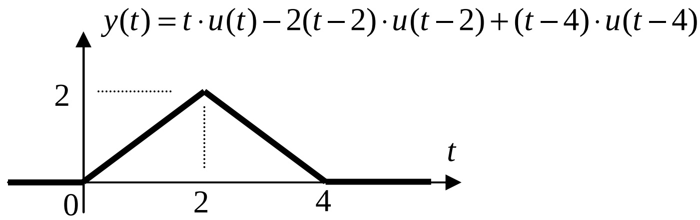
b) $h(t)=0 \quad \forall t<0$ olduğundan dolayı DZD sistem nedenseldir.

$h(t)\neq K\delta(t)$ olduğundan (yani $h(t)$ ötelenmemiş birim darbe cinsinden yazılamayacağı için) sistem belleklidir. Daha basitçesi: Bazı $t\neq 0$ için $h(t)\neq 0$ olduğu için.

$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|\,dt=2\times 1=2<\infty$ olduğundan sistem kararlıdır.

2) $x(t)=u(t)-u(t-2)$ olduğundan $y(t)=s(t)-s(t-2)$ olur, burada $s(t)$ sistemin birim basamak tepkisi olup $s(t)=\int_{\tau=-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$ biçiminde hesaplanır. Yani t anındaki değeri h fonksiyonu grafiğinde t 'nin sol tarafında biriken alandır. Buna göre $s(t)$ ile $-s(t-2)$ aşağıda soldaki şekildeki gibi olur. Bu iki bileşenin toplamıyla da $y(t)$ aşağıda sağdaki gibi bulunur.





3) Çıkış: $y[n]=h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]\cdot x[n-k]=h[0]\cdot x[n]+h[1]\cdot x[n-1]+h[2]\cdot x[n-2]$

$$y[n]=x[n]+x[n-1]+x[n-2]=(-1)^n+\underbrace{(-1)^{n-1}+(-1)^{n-2}}_{0}=\boxed{y[n]=(-1)^n \quad \forall n}$$

4) Sinyalin ortalaması sıfırdır ($c_0=a_0/2=0$). Tek sinyal değildir (orijinle sağdaki ilk tepe arasında büküm var, soldaki ilk tepe arasında yok). Çift sinyal hiç değildir (orijinin hemen sağı pozitif, hemen solu negatif). Yani her a_k veya her b_k'nın sıfır olduğu söylenemez. Sinyalin bir yarı periyodu, diğer yarı periyodunun negatifi değerlidir ($x(t+\frac{T_0}{2})=-x(t)$), yani tek harmonik simetrisi vardır. Sonuçta sıfır olanlar:

"a_0", "c_0", "çift k'lar için hem a_k hem b_k hem c_k"

Son iki seçenek ise sıfır sinyal hariç gerçel sinyallerde olmaz. Çünkü gerçel sinyallerde $c_{-k}=c_k^*$ olduğundan herhangi bir k için c_k sıfır olsa c_{-k} da sıfır olurdu.

5) Transfer fonksiyon : $\frac{12(j\omega)+4}{2(j\omega)^2+8(j\omega)+6}=\boxed{H(\omega)=\frac{6(j\omega)+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)}}=\frac{A}{(j\omega+1)}+\frac{B}{(j\omega+3)}$

$$A=\frac{6(j\omega)+2}{(j\omega+3)}\Bigg|_{j\omega\leftarrow -1}=\frac{-6+2}{-1+3}=-2 \qquad B=\frac{6(j\omega)+2}{(j\omega+1)}\Bigg|_{j\omega\leftarrow -3}=\frac{-18+2}{-3+1}=8$$

$$h(t)=\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{-2}{(j\omega+1)}+\frac{8}{(j\omega+3)}\right\}=\ -2e^{-t}u(t)+8e^{-3t}u(t)=\boxed{h(t)=\left(8e^{-3t}-2e^{-t}\right)u(t)}$$

6) Transfer fonksiyon : $\dfrac{z+1}{2z-1}=\boxed{H(z)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{z+1}{z-(1/2)}\quad;\quad |z|>1/2}$

$$x[n]=u[n]=1^n u[n]\quad\Rightarrow\qquad X(z)=\frac{z}{z-1}\quad;\quad |z|>1$$

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{z(z+1)}{(z-1)(z-1/2)}\quad;\quad |z|>1$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(z+1)}{(z-1)(z-1/2)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-1/2}\qquad\qquad A=\frac{1}{2}\frac{z+1}{(z-1/2)}\bigg|_{z=1}=\frac{1}{2}\times\frac{1+1}{1-1/2}=2=A$$

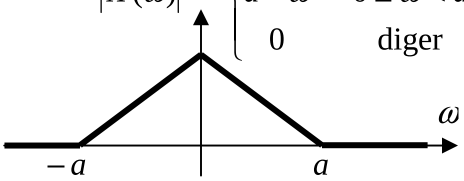
$$B=\frac{1}{2}\frac{z+1}{(z-1)}\bigg|_{z=1/2}=\frac{1}{2}\times\frac{1/2+1}{1/2-1}=-3/2=B\qquad\qquad Y(z)=2\frac{z}{z-1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{z}{z-1/2}\quad;\quad |z|>1$$

$$\rightarrow\quad y[n]=2\times 1^n u[n]-\frac{3}{2}\times\frac{1}{2^n}u[n]=\boxed{y[n]=\left(2-\frac{3}{2}\times\frac{1}{2^n}\right)u[n]}$$

7) $x(t)$ sinyalinin enerjisi: $E_x=\displaystyle\int_{t=-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt$ (Sinyalin bir ses çıkış elemanı üzerine bırakacağı enerjinin bununla orantılı olduğu anlamına gelir. Akım veya gerilim sinyalinin direnç üzerinde bıraktığı enerji gibi.) Parseval eşitliğine göre:

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{+\infty}|X(\omega)|^2\,d\omega=E_x \quad \text{ve}$$

$$|X(\omega)|^2=\begin{cases}a+\omega & -a<\omega<0\\ a-\omega & 0\le\omega<a\\ 0 & \text{diger}\end{cases}$$



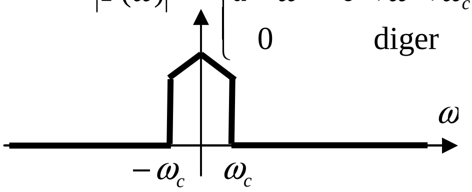
$$\int_{t=-\infty}^{+\infty}|y(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{+\infty}|Y(\omega)|^2\,d\omega=E_y$$

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)\quad\rightarrow\quad |Y(\omega)|^2=|X(\omega)|^2|H(\omega)|^2$$

$|H(\omega)|^2$ grafiği $|H(\omega)|$'nınkiyle aynı olduğundan çarpımın grafiği yanda gösterildiği gibi olur.

$y(t)$ sinyalinin enerjisi:

$$|Y(\omega)|^2=\begin{cases}a+\omega & -\omega_c<\omega<0\\ a-\omega & 0<\omega<\omega_c\\ 0 & \text{diger}\end{cases}$$



$$E_y=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\omega_c}^{0}(a+\omega)d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega=0}^{\omega_c}(a-\omega)d\omega$$

$$=\frac{1}{4\pi}(a+\omega)^2\Big|_{-\omega_c}^{0}-\frac{1}{4\pi}(a-\omega)^2\Big|_{0}^{\omega_c}=\frac{a^2-(a-\omega_c)^2-(a-\omega_c)^2-(-a^2)}{4\pi}=\frac{a^2-(a-\omega_c)^2}{2\pi}=E_y$$

E_x integralinin bundan tek farkı ω_c yerine de a yazılması olduğu için $E_x=\dfrac{a^2}{2\pi}$ bulunur.

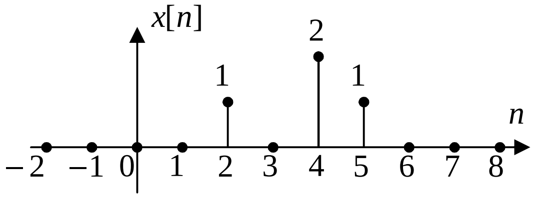
$$\rightarrow\qquad \frac{E_y}{E_x}=\frac{1}{2}=\frac{a^2-(a-\omega_c)^2}{a^2}\qquad\qquad \rightarrow\ a^2=2a^2-2(a-\omega_c)^2\qquad\qquad \rightarrow\ 2(a-\omega_c)^2=a^2$$

$$\rightarrow\qquad a-\omega_c=a/\sqrt{2}\qquad\rightarrow\qquad \boxed{\omega_c=\left(1-1/\sqrt{2}\right)\cdot a\approx 0{,}29a}$$

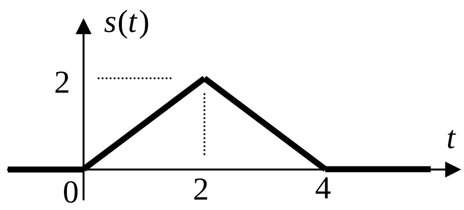
SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
18.01.2012 Süre: 80 dakika

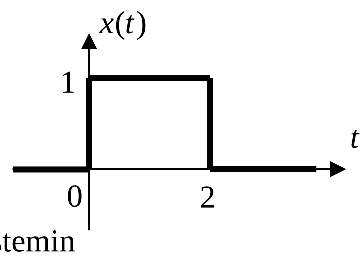
1) Bir öğrencinin ders çalışma sistemi şöyledir: Her bir derse çalışmaya sınavdan üç gün önce 1 saat ile başlıyor, iki gün önce 2 saat, bir gün önce 3 saatle devam ediyor ve sınav günü 1 saat ile o derse çalışmayı sonlandırıyor. Günlere göre sınav sayıları giriş, günlük ders çalışma saat sayıları çıkış olarak tanımlanıyor ve öğrencinin sınav programının, bu sistemin doğrusal ve zamanla değişmez olmasını bozmayacak, günün mümkün olan saat sınırlarını zorlamayacak bir yoğunlukta olduğu ve aksamayacağı varsayılıyor.

a) Sistemin birim darbe tepkisini çiziniz. **(6 puan)**
b) Varsayımlar altında sistem nedensel midir, kararlı mıdır? **(2+2=4 puan)** Genel ifadelerle değil, bu sisteme özel gerekçelerini belirterek yazınız.
c) Öğrencinin günlere (n) göre sınav sayıları ($x[n]$) grafikteki gibiyse bu öğrencinin günlere göre ders çalışma saat sayılarını grafikle gösteriniz. **(10 puan)**



2)



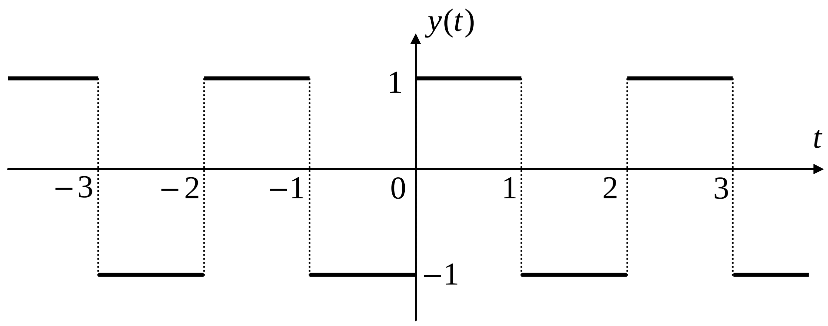


Birim basamak tepkisi yukarıdaki $s(t)$ olan (DZD) sistemin

a) Girişine şekildeki $x(t)$ uygulanırsa alınacak çıkış sinyalini ($y(t)$) çiziniz. **(12 puan)**
b) Birim darbe tepkisini ($h(t)$) çiziniz. **(8 puan)**

Her iki çizimde de özel noktaların yeri belli olmalıdır.

3) Şekilde verilen $T = 2$ ile periyodik $y(t)$ sinyalini Fourier serisine açınız. (Genel katsayı formüllerini bulunuz ve serinin sıfırdan farklı en az 3 terimini, katsayılarının sayısal değerlerini yerine koyarak yazınız.) **(20 puan)**



4) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)** ve $x(t) = e^{-t}u(t)$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını **(15 puan)** bulunuz.

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = 5\dot{x}(t) + 5x(t)$$

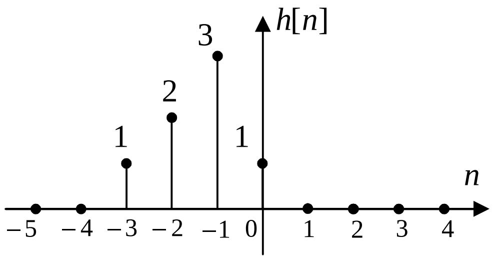
5) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(6 puan)** ve birim darbe tepkisini **(14 puan)** bulunuz.

$$y[n+2] - 0{,}5y[n+1] + 0{,}06y[n] = x[n+1] - 0{,}5x[n]$$

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI CEVAP ANAHTARI
18.01.2012

1) a) Bu sistem için birim darbe tepkisi demek, 0. günde bir adet sınavı varsa öğrencinin günlere göre çalışma saatleri demektir ve şekildeki gibidir.

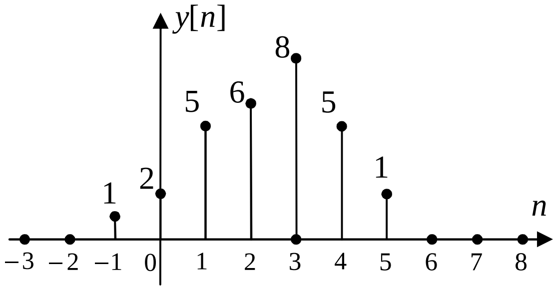


b) Bazı $n<0$ için $h[n]\neq 0$ olduğu için sistem nedensel değildir.

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]| = 1+2+3+1 = 7 < \infty$ olduğu için sistem kararlıdır. (Günün 24 saat sınırı olmasa bile bu nedenle kararlı olurdu.)

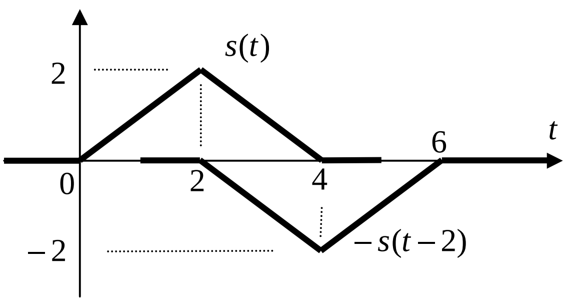
c) Çıkış $y[n]=x[n]*h[n]$. Her iki sinyal de sonlu süreli olduğu için şu yöntem uygulanabilir:

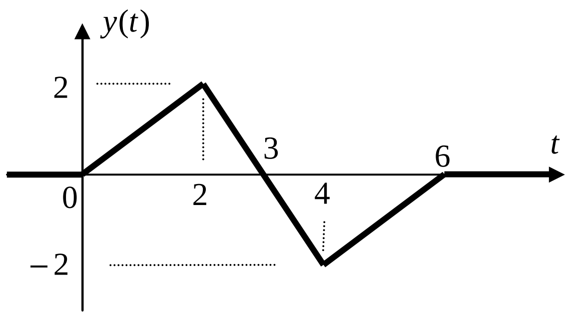
$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
 & & & 1 & 2 & 3 & 1 & \rightarrow \text{sonuncusu } h[0] \\
\times & & & 1 & 0 & 2 & 1 & \rightarrow \text{sonuncusu } x[5] \\
\hline
 & & & 1 & 2 & 3 & 1 & \\
 & & 2 & 4 & 6 & 2 & & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
+\ 1 & 2 & 3 & 1 & & & & \\
\hline
1 & 2 & 5 & 6 & 8 & 5 & 1 & \rightarrow \text{sonuncusu } y[0+5]=y[5]
\end{array}
$$



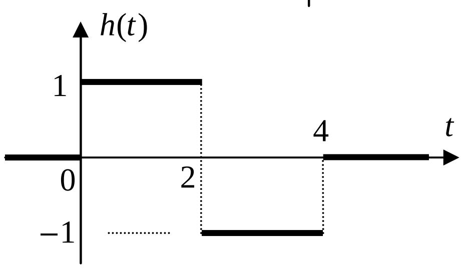
Buna göre $y[n]$ yukarıdaki şekilde gösterildiği gibi olur. (Dikkat! Bu işlem her ne kadar klasik çarpmaya benzese de elde aktarımı yapılmaz ve her bir sayı eksi de olsa artı da olsa rakam rakam değil olduğu gibi sayı olarak ele alınır.)

2) a) $x(t)=u(t)-u(t-2)$ olduğu için u yerine s ve x yerine y yazılır: $y(t)=s(t)-s(t-2)$ olur. Aşağıda çıkışın bu iki bileşeni soldaki şekilde, toplamı () da sağdaki şekilde gösterilmiştir.





b) Birim darbe tepkisi $h(t)=\dfrac{ds(t)}{dt}$
Yandaki şekildeki gibi elde edilir.



3) Gerçel seriye açalım: $y(t)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\big(a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)\big)$; $\omega = 2\pi/T = 2\pi/2 = \pi$

$y(-t)=-y(t)$ olduğu için sinyal tektir. Dolayısıyla gerçel serisinde yalnız sinüslü terimler vardır. $a_0=a_k=0 \quad \forall k$. Ayrıca tek harmonik simetrisine de sahip olduğu için tek k ’lar için b_k sıfır olacaktır. Bunu sağlama amacıyla kullanacağız.

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} y(t)\sin(k\omega t)dt = \frac{4}{2}\int_0^{2/2} y(t)\sin(k\pi t)dt = 2\int_0^1 1\cdot\sin(k\pi t)dt = \frac{-2}{k\pi}\cos(k\pi t)\Big|_0^1 = \frac{-2}{k\pi}\cos(k\pi) - \frac{-2}{k\pi}$$

b_k için k ’nın sıfır olması söz konusu olmadığı için burada belirsizlik yoktur. $\cos(k\pi)=(-1)^k$ olduğu için

$$b_k = \frac{2}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right) \quad \rightarrow \quad b_k = \begin{cases} 4/k\pi & k \text{ tekse} \\ 0 & k \text{ çiftse} \end{cases} \quad \rightarrow \quad b_1 = \frac{4}{\pi} \quad , \quad b_3 = \frac{4}{3\pi} \quad , \quad b_5 = \frac{4}{5\pi} \ .$$

$$\boxed{y(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin(\pi t)}{1} + \frac{\sin(3\pi t)}{3} + \frac{\sin(5\pi t)}{5} + \dots\right)}$$

Tek harmonik simetrili olduğu için seride çift harmonik yoktur. Karmaşık seri katsayıları istenirse, sinyal tek olduğu için $c_k = -c_{-k} = -j\frac{b_k}{2} = \begin{cases} -j2/k\pi & k \text{ tekse} \\ 0 & k \text{ çiftse} \end{cases}$

$$\rightarrow \quad c_1 = -c_{-1} = -j\frac{2}{\pi} \quad , \quad c_3 = -c_{-3} = -j\frac{2}{3\pi} \quad , \quad c_5 = -c_{-5} = -j\frac{2}{5\pi}$$

$$\boxed{y(t) = \dots + j\frac{2}{5\pi}e^{-j5\pi t} + j\frac{2}{3\pi}e^{-j3\pi t} + j\frac{2}{\pi}e^{-j\pi t} - j\frac{2}{\pi}e^{j\pi t} - j\frac{2}{3\pi}e^{j3\pi t} - j\frac{2}{5\pi}e^{j5\pi t} - \dots}$$

4) Transfer fonksiyon : $\frac{5(j\omega)+5}{(j\omega)^2+5(j\omega)+6} = \boxed{H(\omega) = \frac{5(j\omega+1)}{(j\omega+2)(j\omega+3)}}$

$$x(t) = e^{-t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = \frac{1}{j\omega+1} \qquad Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \frac{5(j\omega+1)}{(j\omega+2)(j\omega+3)} \cdot \frac{1}{j\omega+1}$$

$$Y(\omega) = \frac{5}{(j\omega+2)(j\omega+3)} = \frac{A}{(j\omega+2)} + \frac{B}{(j\omega+3)}$$

$$A = \left.\frac{5}{(j\omega+3)}\right|_{j\omega\leftarrow -2} = \frac{5}{-2+3} = 5 \qquad B = \left.\frac{5}{(j\omega+2)}\right|_{j\omega\leftarrow -3} = \frac{5}{-3+2} = -5$$

$$Y(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y(t) = 5e^{-2t}u(t) - 5e^{-3t}u(t) = \boxed{y(t) = 5\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)u(t)}$$

5) Transfer fonksiyon : $\frac{z-0{,}5}{z^2-0{,}5z+0{,}06} = \boxed{H(z) = \frac{z-0{,}5}{(z-0{,}2)(z-0{,}3)} \quad ; \quad |z| > 0{,}3}$

$$H(z) = \frac{A}{z-0{,}2} + \frac{B}{z-0{,}3} \qquad A = \left.\frac{z-0{,}5}{(z-0{,}3)}\right|_{z=0{,}2} = \frac{0{,}2-0{,}5}{0{,}2-0{,}3} = 3 = A$$

$$B = \left.\frac{z-0{,}5}{(z-0{,}2)}\right|_{z=0{,}3} = \frac{0{,}3-0{,}5}{0{,}3-0{,}2} = -2 = B$$

$H(z) = 3z^{-1}(\frac{z}{z-0{,}2}) - 2z^{-1}(\frac{z}{z-0{,}3}) \quad ; \quad |z| > 0{,}3$ Buradaki z^{-1} çarpanı 1 adım geriletir:

$$\boxed{h[n] = 3\times(0{,}2)^{n-1}u[n-1] - 2\times(0{,}3)^{n-1}u[n-1]}$$