

# DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLER İÇİN KALMAN FİLTRESİ VE ASENKRON MAKİNALARA UYGULANMASI

Ata Sevinç<sup>1</sup>, Kemal Leblebicioğlu<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Kırıkkale Üniversitesi Elektrik-Elektrik Müh. Böl.  
<sup>2</sup>Orta Doğu Teknik Üniversitesi Elektrik-Elektronik Müh. Böl.

## Özet :

Bu çalışmada, Kalman filtresinin doğrusal zamanla değişen ayrık zaman sistemleri için bilinen şekli anlatıldıktan sonra, doğrusal olmayan ayrık zaman sistemlerinin belli bir sınıfı için de uygulanması hakkında bir öneri getirilmiş, daha sonra da sürekli zaman modeli verilmiş doğrusal olmayan bazı sistemler için de bu uygulamayı mümkün kılan ve "tam ayrıklaştırma yöntemi" denilen bir yöntem geliştirilmiştir. Ayrıca James ve Baras[1] tarafından geliştirilen ve doğrusal olmayan bazı sürekli zaman sistemleri için uygulanan, ve bir çeşit Kalman filtresi olarak kabul edilen bir sürekli zaman gözleyici tasarım yöntemi anlatılmıştır. Daha sonra da hem ayrık hem de sürekli zamandaki yöntemler bir asenkron makina modeli üzerinde uygulanarak oldukça başarılı gözleyiciler tasarlanmıştır.

## 1. Zamanda Ayrık Kalman Filtresi :

### 1.1. Doğrusal Zamanla Değişen Gaussyen Model[2] :

Aşağıdaki gibi doğrusal zamanla değişen istatistiksel bir sistem modeli düşünelim:

$$\left. \begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k + G_k w_k, \\ y_k &= C_k x_k + H_k v_k. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Burada temel rastsal değişkenler  $(x_0, w_0, w_1, \dots, v_0, v_1, \dots)$  birbirinden bağımsız ve

$$x_0 \sim N(\bar{x}_0, \Sigma_0), \quad w_k \sim N(0, Q), \quad v_k \sim N(0, R) \quad (2)$$

şeklinde Gaussyen olup, kovaryans matrisleri  $\Sigma_0$ ,  $Q$  ve  $R$  bilinmektedir.  $k$  anında elimizde mevcut bütün çıkış bilgisini  $y^k = (y_k, y_{k-1}, \dots, y_0)$  ve bütün giriş bilgisini de  $u^{k-1} = (u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_0)$  ile gösterelim. Kısaca,  $k$  anında elimizde mevcut bütün giriş ve çıkış bilgisini  $z^k = (y^k, u^{k-1})$  ile gösterelim.  $z^k$ 'in bilinmesi koşulu altında  $x_k$  ve  $x_{k+1}$ 'a ait olasılık yoğunluk fonksiyonları da sırasıyla  $p_{k|k}(x_k | z^k)$  ve  $p_{k+1|k}(x_{k+1} | z^k)$  olsun. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonları da  $p_{k|k}(x_k | z^k) \sim N(x_{k|k}, \Sigma_{k|k})$  ve  $p_{k+1|k}(x_{k+1} | z^k) \sim N(x_{k+1|k}, \Sigma_{k+1|k})$  şeklinde Gaussyen olacaktır. Bu sistem için zamanda ayrık Kalman filtresi ile aşağıdaki gibi durum tahmini elde edilir:

$$\begin{aligned} x_{k+1|k+1} &= A_k x_{k|k} + B_k u_k \\ &+ L_{k+1} [y_{k+1} - C_{k+1} (A_k x_{k|k} + B_k u_k)], \end{aligned} \quad (3)$$

$$x_{k+1|k} = A_k x_{k|k-1} + B_k u_k + A_k L_k [y_k - C_k x_{k|k-1}] \quad (4)$$

$$x_{0|0} = \bar{x}_0 + L_0 (y_0 - C_0 \bar{x}_0), \quad x_{0|-1} = \bar{x}_0 \quad (5)$$

Burada,

$$L_k \triangleq \Sigma_{k|k-1} C_k^T [C_k \Sigma_{k|k-1} C_k^T + H_k R H_k^T]^{-1} \quad (6)$$

$$L_0 \triangleq \Sigma_0 C_0^T [C_0 \Sigma_0 C_0^T + H_0 R H_0^T]^{-1} \quad (7)$$

ve koşullu kovaryans matrisleri ise

$$\Sigma_{k+1|k+1} = (I - L_{k+1} C_{k+1}) \Sigma_{k+1|k} \quad (8)$$

$$\Sigma_{k+1|k} = A_k \Sigma_{k|k} A_k^T + G_k Q G_k^T \quad (9)$$

$$\Sigma_{0|0} = (I - L_0 C_0) \Sigma_0 \quad (10)$$

ile verilir.

Bu şekilde elde edilen  $x_{k+1|k}$  ve  $x_{k+1|k+1}$  durum tahminlerinin kovaryans matrisleri, norm olarak minimum olmaktadır. Yani hata için en küçük kareler ölçütüne göre, mümkün olan en iyi durum tahmini Kalman filtresi ile elde edilendir.

### 1.2. Doğrusal Olmayan Bazı Sistemler İçin Kalman Filtresi[3] :

Kalman filtresinin doğrusal bir sisteme uygulanmasında,  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$ ,  $G_k$  ve  $H_k$  matrisleri üzerinde, değerlerinin biliniyor olması dışında bir kısıtlama yoktur. O halde,

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k, k) = A(u_k, y_k, k) x_k + b(u_k, y_k, k) + w_k \quad (11)$$

$$y_k = h(x_k, u_k, v_k, k) = C(u_k, y_k, k) x_k + v_k \quad (12)$$

$$E\{w_k\} = 0, \quad E\{v_k\} = 0, \quad cov(w_k) = Q_k, \quad cov(v_k) = R_k$$

formunda ifade edilebilen doğrusal olmayan bir sistem için de

$$\left. \begin{aligned} A_k &\triangleq A(u_k, y_k, k), \quad B_k u_k \triangleq b(u_k, y_k, k), \\ C_k &\triangleq C(u_k, y_k, k), \quad G_k Q G_k^T \triangleq \tilde{Q}_k, \quad H_k R H_k^T \triangleq \tilde{R}_k \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

değerleri ile, (3)-(10) denklemleriyle verilen Kalman filtresi kullanılabilir. Burada  $\bar{Q}_k$  ve  $\bar{R}_k$ ,  $y_k$  'deki belirsizlik nedeniyle  $A_k$ ,  $B_k u_k$  ve  $C_k$  olarak aldığımız değerlerde olabilecek hataları da kapsayacak bir şekilde  $A(u_k, y_k, k)$ ,  $b(u_k, y_k, k)$ ,  $C(u_k, y_k, k)$  fonksiyonlarının tipine göre tahminen yaklaşık olarak seçilebilir.

Kalman filtresinin, bu uygulamada vereceği durum tahmini de, en küçük kareler ölçütüne göre mümkün olan en iyi durum tahminidir. Ancak bu durumda olasılık yoğunluk fonksiyonları Gaussyen olmak zorunda değildir.

## 2. Doğrusal Olmayan Sürekli Zaman Sistemleri :

### 2.1. Tam Ayırıklaştırma Yöntemi[3] :

Bu çalışmada doğrusal olmayan sürekli zaman sistemlerinin bir kısmı için, zamanda ayrık Kalman filtresinin uygulanmasına imkan veren ve "tam ayırıklaştırma yöntemi" diye adlandırılan bir yöntem önerilmektedir. Bu yöntem,

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t) = A(u(t), y(t), t)x + b(u(t), y(t), t), & x(t_0) &= x_0, \\ y &= h(x, u, t) = C(u(t), y(t), t)x \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

formunda ifade edilebilen sistemlere uygulanabilmektedir. Burada  $A(u(t), y(t), t)$ ,  $b(u(t), y(t), t)$  ve  $C(u(t), y(t), t)$  değerleri,  $t_0$  ile içinde bulunulan an( $t_p$ ) arasında bilindiği için, sistemin durum çözümü

$$x(t) = A^*(t)x(t_k) + b^*(t), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1} \leq t_p \quad (15)$$

formunda, doğrusal zamanla değişen bir sistemdeki gibi elde edilebilir. Ancak burada  $A^*(t)$  ve  $b^*(t)$ , sistemin giriş ve çıkışına da bağlı olacaktır. Bu durum çözümünden faydalanarak sistem denklemlerini aşağıdaki gibi tam olarak ayırıklaştırmak mümkün olacaktır:

$$\left. \begin{aligned} x_{k+1} &= A_{k+1}^* x_k + b_{k+1}^*, & x_0 &= x(t_0), \\ y_k &= C_k x_k \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Burada  $x_k = x(t_k)$ ,  $y_k = y(t_k)$ ,  $A_{k+1}^* = A^*(t_{k+1})$ ,  $b_{k+1}^* = b^*(t_{k+1})$  ve  $C_k = C(u(t_k), y_k, t_k)$  olarak alınmıştır.

Eğer mümkünse  $A_{k+1}^*$  ve  $b_{k+1}^*$ , sistem denkleminin analitik çözümüyle bulunabilir. Fakat çoğu sistem için analitik çözüm bulmak mümkün olmaz. Bu yüzden tam ayırıklaştırma için şöyle bir yöntem önerilmektedir:

Aşağıdaki gibi bir sistem tasarlayalım:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi} &= A(u(t), y(t), t)\phi + [b(u(t), y(t), t) \dots b(u(t), y(t), t)]_{n \times (n+1)}, \\ \phi(t_k^+) &= \phi_k^+ \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Bu sistemin durum değişkeni,  $\phi = \phi(t) \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$  şeklinde bir matristir. Burada  $t_k^*$  ve  $\phi_{k^*}$  notasyonu kullanmamızın nedeni, sistemi örnekleme anından hemen sonra yeniden bir başlangıç değerinden başlatmak daha kullanışlı olduğu içindir. O zaman da

$$\phi_k = \phi(t_k) = \phi(t_k^*) = \phi_{k^*} \quad (18)$$

olmaktadır. Tasarladığımız sistemi, orijinal sistem gibi tam ayrıklaştırma yöntemiyle ayrık zamana çevirirsek,

$$\phi_{k+1} = A_{k+1}^* \phi_k + [b_{k+1}^* \dots b_{k+1}^*]_{n \times (n+1)}, \quad \phi(t_k^*) = \phi_{k^*} \quad (19)$$

yani,

$$\phi_{k+1} = [A_{k+1}^* \quad b_{k+1}^*]_{n \times (n+1)} \begin{bmatrix} \phi_{k^*} \\ \dots \\ 1, \dots, 1 \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \quad (20)$$

buluruz. Buradan da

$$[A_{k+1}^* \quad b_{k+1}^*] = \phi_{k+1} \begin{bmatrix} \phi_{k^*} \\ \dots \\ 1, \dots, 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (21)$$

bulunur.  $\phi_{k^*}$  keyfi olarak seçilebilmekle beraber

$$\text{rank} \left( \begin{bmatrix} \phi_{k^*} \\ \dots \\ 1, \dots, 1 \end{bmatrix} \right) = n+1 \quad (22)$$

olmalıdır. Şimdi, zamanda ayrık Kalman filtresini  $A_k = A_{k+1}^*$ ,  $B_k u_k = b_{k+1}^*$  olarak uygulayabiliriz.  $G_k Q G_k^T$ ,  $H_k R H_k^T$  değerlerini ise bu işlem sırasında olabilecek hataların tahmini büyüklüğüne göre uygun bir şekilde seçeriz.

## 2.2. Doğrusal Olmayan Bazı Sistemler İçin Kalman Filtresi Tipinde Sürekli Zaman Gözleyici Tasarım Yöntemi :

Doğrusal olmayan sistemler için Kalman filtresi tipinde bir sürekli zaman gözleyici tasarım yöntemi James ve Baras[1] tarafından önerilmiştir.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), & x(t_0) &= x_0, \\ y &= h(x) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

sistemini gözönüne alalım. Burada  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^r$  ve  $y \in \mathbb{R}^m$  olup, giriş mutlak değerce sınırlıdır.  $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\text{rank}(N) = n$ ,  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  kesin pozitif bir matris,

$$A(x,u) = \frac{\partial f(x,u)}{\partial x}, \quad H(x) = R^{-1} \frac{\partial h(x)}{\partial x} \quad (24)$$

olsun.

$$\|A\| = \sup \{ \|A(x,u)\| : x \in \mathcal{X}^n, |u_i| \leq 1, 1 \leq i \leq r \} \quad (25)$$

olarak,  $\|H\|$  ve diğer matris normları da benzer şekilde tanımlansın.

Şimdi aşağıdaki diferansiyel denklem çiftiyle tanımlı bir sistem tasarlıyalım:

$$\dot{z}(t) = f(z(t), u(t)) + Q(t)H(z(t))^T R^{-1}(y(t) - h(z(t))), \quad z(t_0) = z_0, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) &= A(z(t), u(t))Q(t) + Q(t)A(z(t), u(t))^T \\ &\quad - Q(t)H(z(t))^T H(z(t))Q(t) + NN^T, \quad Q(t_0) = Q_0 \end{aligned} \quad (27)$$

$p$  ve  $q$  sırasıyla  $\|Q(t)^{-1}\|$  ve  $\|Q(t)\|$ 'nin sınırları olsun. Ayrıca

$$\rho = \rho(Q_0, N, R) = \frac{r_0}{q^2 \|Q_0^{-1/2}\|} \left( \sqrt{p} \|D^2 f\| + \sqrt{q} \|R^{-1}\|^2 \|Dh\| \|D^2 h\| \right)^{-1} \quad (28)$$

biçiminde bir yakınsama yarıçapı tanımlansın. James ve Baras[1] tarafından,

$$\|z_0 - x_0\| < \rho(Q_0, N, R) \quad (29)$$

ve

$$(A(x(t), u(t)) + \Lambda(t)H(x(t))) \quad (30)$$

matrisini yarı kesin negatif yapacak reel bir  $\Lambda(t)$  matris değerli fonksiyonu bulunabilmesi şartıyla, (26)-(27) denklem çiftiyle tanımlanan sistemin, hatası zamanla sifıra giden bir gözleyici olduğu ve

$$\|z(t) - x(t)\| \leq K \|z_0 - x_0\| e^{-\gamma t} \quad \forall t \geq t_0 \quad (31)$$

şartını sağlayan bir  $(K, \gamma)$  pozitif sabit çifti bulunabileceği gösterilmiştir.

### 3. Asenkron Makinalara Uygulanması :

Aşağıda verilen asenkron makina modelini gözönüne alalım:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{x}_r &= A(\omega)x_r + b(u_1, u_2), \\
 \dot{\omega} &= \frac{n_p M}{J L_r} (x_2 x_3 - x_1 x_4) - \frac{B}{J} \omega - \frac{u_3}{J}, \\
 y_r &= C x_r, \quad \tilde{y} = \omega
 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Burada  $x_r = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$  ve  $y_r$ , model dördüncü mertebeye indirgenmiş kabul edildiği takdirdeki durum değişkeni ve çıkıştır.  $x = (x_r^T, \omega)^T$  ve  $y = (y_r^T, \tilde{y})^T$  alındığında sistemin beşinci mertebeli modelini elde ederiz. Modelde,

$$A(\omega) = \begin{bmatrix}
 \frac{L_r R_s + M^2 R_r / L_r}{L_r L_s - M^2} & 0 & \frac{M R_r / L_r}{L_r L_s - M^2} & \frac{n_p M \omega}{L_r L_s - M^2} \\
 0 & \frac{L_r R_s + M^2 R_r / L_r}{L_r L_s - M^2} & \frac{-n_p M \omega}{L_r L_s - M^2} & \frac{M R_r / L_r}{L_r L_s - M^2} \\
 M \frac{R_r}{L_r} & 0 & -\frac{R_r}{L_r} & -n_p \omega \\
 0 & M \frac{R_r}{L_r} & n_p \omega & -\frac{R_r}{L_r}
 \end{bmatrix},$$

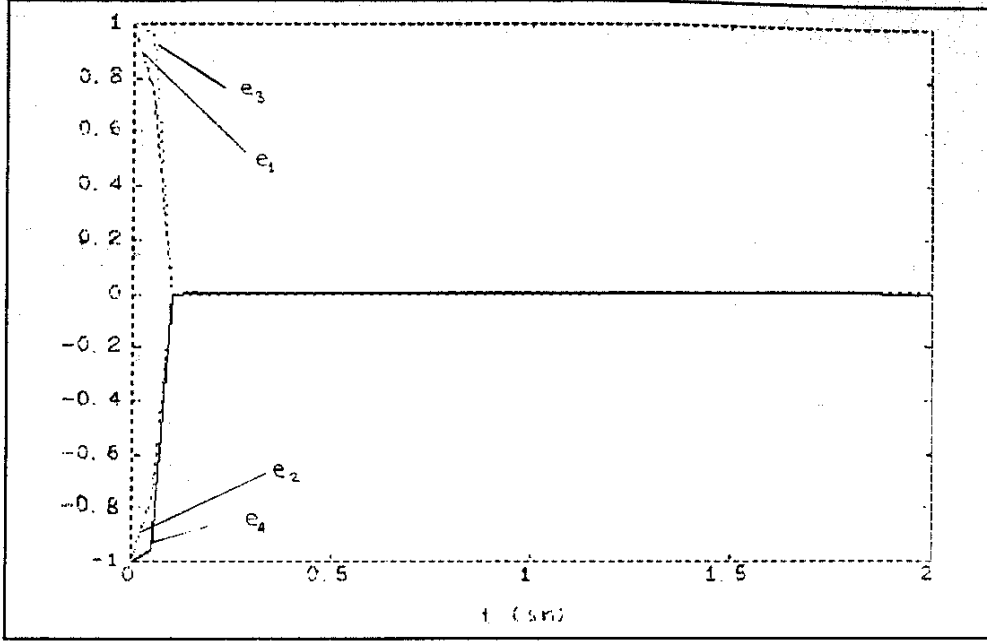
$$b(u_1, u_2) = \frac{L_r}{L_r L_s - M^2} [u_1 \ u_2 \ 0 \ 0]^T, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$R_s = 0.9 \Omega$ ,  $R_r = 0.2 \Omega$  stator ve rotor sargı dirençleri,  $L_s = 202 \text{ mH}$ ,  $L_r = 201.6 \text{ mH}$  stator ve rotor sargı endüktansları,  $M = 190 \text{ mH}$  stator ve rotor sargıları arasındaki karşılıklı endüktans,  $n_p = 1$  kutup çifti,  $B = 0 \text{ Nm s/rad}$  sürtünme katsayısı,  $J = 1 \text{ kgm}^2$  eylemsizlik momenti,  $\omega_s = 100\pi \text{ rd/s}$  açılmalı senkron hız,  $x_1$ ,  $x_2$  stator akımının  $d$  ve  $q$  bileşenleri,  $x_3$ ,  $x_4$  manyetik akımın  $d$  ve  $q$  bileşenleri,  $x_5 = \omega$  açılmalı rotor hızı,  $u_1 = V_d = 300 \cos n_p \omega_s t \text{ V}$ ,  $u_2 = V_q = 520 \sin n_p \omega_s t \text{ V}$  uygulanan stator voltajının sabit referans sistemine göre  $d$  ve  $q$  bileşenleri, ve  $T_L = u_3 = 0 \text{ Nm}$  yük torkudur.

### 3.1. Dördüncü Mertebeye İndirgenmiş Form İçin, Tam Ayrıklaştırma Yöntemi İle Birlikte Kalman Filtresi:

Her ne kadar Kalman filtresi, indirgenmiş (31) modeli için basit ayrıklaştırma işlemiyle direk olarak uygulanabilirse de tam ayrıklaştırma yöntemi, örnekleme periyodunun çok büyütülmesine imkân vermektedir.  $Q = I_4$ ,  $R = I_2$ ,  $G = \text{diag}[0.02 \ 0.01 \ 0.002 \ 0.001]$ ,  $H = 0$ ,  $\Sigma_0 = 10I_4$  kabul ederek ve örnekleme periyodunu  $0.05 \text{ s}$  seçerek Şekil 1'deki sonuçları elde ederiz. Görüldüğü gibi örnekleme.

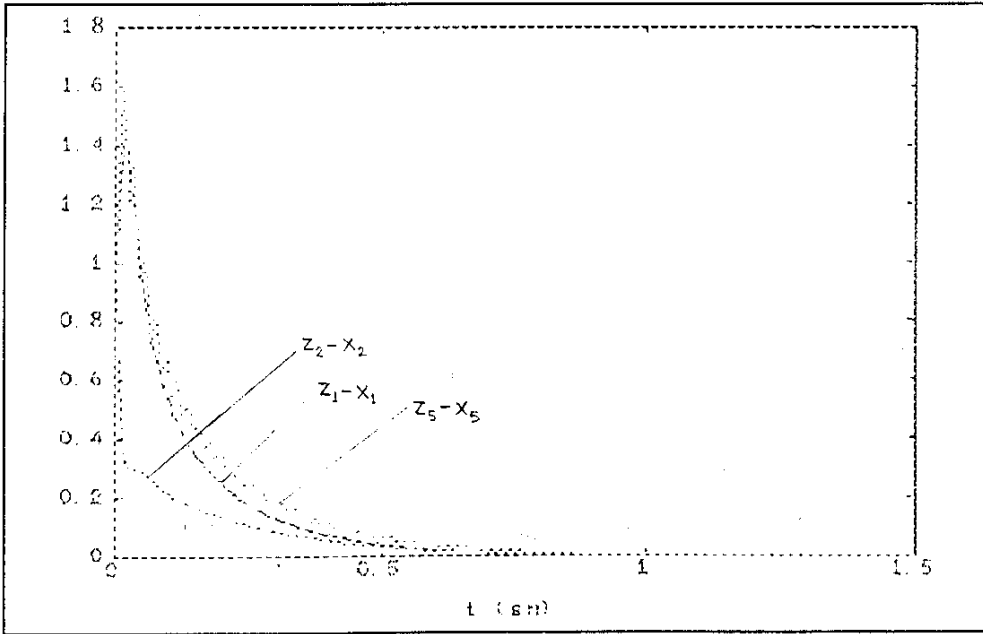
periyodu asenkron makina için büyük bir değer olmasına rağmen, çok çabuk bir yakınsama sağlanmıştır.



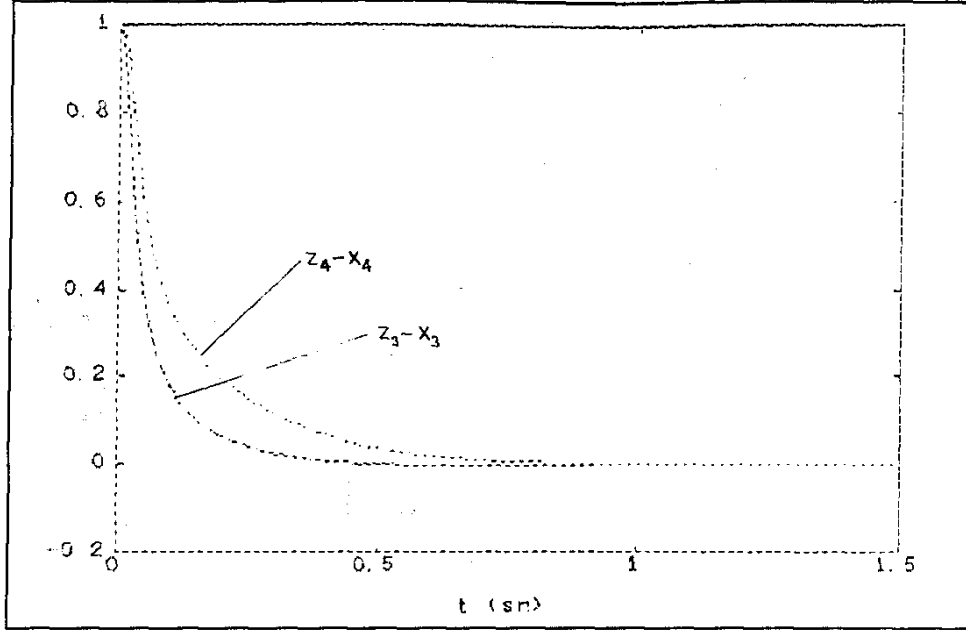
Şekil 1 : Asenkron makina modeli için zamanda ayırık Kalman filtresi hatası.

### 3.2. James ve Baras'ın Yöntemiyle Beşinci Mertebeli Form İçin Gözleyici:

Elimizdeki model bu yöntemin gerektirdiği şartları sağlamaktadır.  $R=I_3$ ,  $N=5I_5$ , ve  $Q_0=I_5$  olarak tasarlanan gözleyici ile elde edilen sonuçlar Şekil 2 ve Şekil 3'de görülmektedir. Sonuçlar son derece başarılı olmuştur.



Şekil 2 : Asenkron makina modeli için sürekli zaman Kalman filtresi akım ve hız hataları.



Şekil 3 : Asenkron makina modeli için sürekli zaman Kalman filtresi akı hataları.

#### 4. Sonuç :

Asenkron makina için daha önce tasarlanan gözleyiciler genellikle iki boyuta indirgenmiş model için, çok azı da dört boyutlu model için tasarlanmıştır. İndirgenmiş modeller için yapılan gözleyiciler indirgeme sırasında durum değişkeni dışında kabul edilen değişkenlerdeki ölçüm hatalarına karşı çok duyarlı olmaktadır. James ve Baras'ın yöntemiyle tasarlanan gözleyicide bu kusurlar bertaraf edilmekle kalmayıp, yakınsamaya çok çabuk ulaşılması da sağlanmıştır. Dördüncü mertebeye indirgenmiş modeller için yapılan gözleyiciler içinde en başarılı olanı, daha önce de olduğu gibi Kalman filtresidir. Ama tam ayrıklaştırma yöntemiyle Kalman filtresinin kullanılması, örneklemelerin çok daha seyrek aralıklarla alınmasına imkân sağlamıştır. Ancak burada herhangi bir andaki durum tahmini, hesaplamalar için gerekli zaman kadarlık bir gecikmeyle elde edilebilmektedir. Bu yüzden çok hızlı kontrol sistemleri için gerekli gözleyici ihtiyacını karşılamada kullanılamaz.

#### Kaynaklar :

- [1] James, M.R. and Baras, J.S., "An Observer Design for Nonlinear Control Systems", *Proceedings of the 8th International Conference on Analysis and Optimization of Systems*, pp.170-180, INRIA, Antibes, France, June 8-10, 1988.
- [2] Kumar, P.R. and Varaiya, P., *Stochastic Systems: Estimation, Identification and Adaptive Control*, 1986.
- [3] Sevinç, A., *Observer Design Techniques for Non-linear Systems*, ODTÜ FBE Yüksek Lisans Tezi, 1995.